Chapitre 34

Théorie de l'intégration

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial (non vide et non réduit à un point).
De plus, a et b sont deux réels tels que $a < b$.

1 Construction de l'intégrale

1.1 Subdivisions

Définition 34.1 – Subdivision d'un segment

Étant donné un segment $\left[a,b\right]$, on appelle <u>subdivision</u> (finie) de $\left[a,b\right]$ toute famille $\sigma = (x_0,\cdots,x_n)$ de points de $\left[a,b\right]$ qui vérifient

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

On définit le <u>pas</u> de la subdivision σ comme l'écart maximal entre deux points consécutifs. On le notera :

$$\delta(\sigma) := \max_{0\leq i\leq n-1} (x_{i+1} - x_i) > 0$$

Enfin, on définit le <u>support</u> de $\sigma = (x_0,\cdots,x_n)$ comme l'ensemble des points $x_0,\cdots,x_n$, càd

$$\mathrm{Supp}\,(\sigma) := \{x_0,\cdots,x_n\}$$

Ce support caractérise la subdivision σ.

Remarque. Certains ouvrages définissent une subdivision σ comme étant l'ensemble de points ci-dessus et non une famille de points.

Comme son nom l'indique, une subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ permet de subdiviser l'intervalle $\left[a,b\right]$ en une partition, constituée des singletons $\{x_i\}$ et des intervalles $\left]x_i,x_{i+1}\right[$:

$$\left[a,b\right] \;=\; \{x_0\} \,\cup\, \left]x_0,x_1\right[\,\cup\, \{x_1\} \,\cup\, \left]x_1,x_2\right[\,\cup \ldots \cup\, \{x_{n-1}\} \,\cup\, \left]x_{n-1},x_n\right[\,\cup\, \{x_n\}$$

Exemple 1. $\sigma = \left(k^2\right)_{0\leq k\leq 3}$ est une subdivision de $\left[0,9\right]$, mais pas de $\left[0,10\right]$ ou de $\left[1,9\right]$.

Exemple 2. Soit $\sigma = (x_k)_{0\leq k\leq n}$ une subdivision de $\left[a,b\right]$. On dit que cette subdivision est <u>régulière</u> si les points $x_0,\cdots,x_n$ sont équidistants.

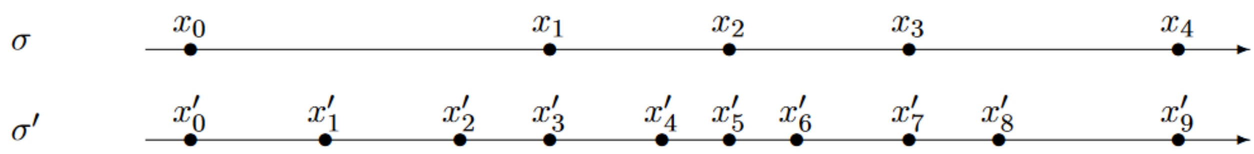
L'intervalle $\left[a,b\right]$ est donc découpé en n sous-intervalles $\left(\left[x_k,x_{k+1}\right]\right)_{0\leq k\leq n-1}$ de même longueur. Le pas de cette subdivision est $\delta(\sigma) =$ ....

Définition 34.2 – Subdivision plus fine

Soit σ et σ' deux subdivisions de $\left[a,b\right]$. On dit que σ' est <u>plus fine</u> que σ si on peut obtenir la subdivision σ' à partir de σ en rajoutant zéro, un ou plusieurs points.
On notera cela abusivement $\sigma \subset \sigma'$

Autrement dit, σ' est plus fine que σ si et seulement si $\mathrm{Supp}\,(\sigma) \ldots \mathrm{Supp}\,(\sigma')$. En particulier, $\delta(\sigma) \ldots \delta(\sigma')$.

Exemple 3. La subdivision $\sigma' = \left\{x'_j \mid 0 \leq j \leq 9\right\}$ représentée ci-dessous est plus fine que $\sigma = \{x_i \mid 0 \leq i \leq 4\}$.



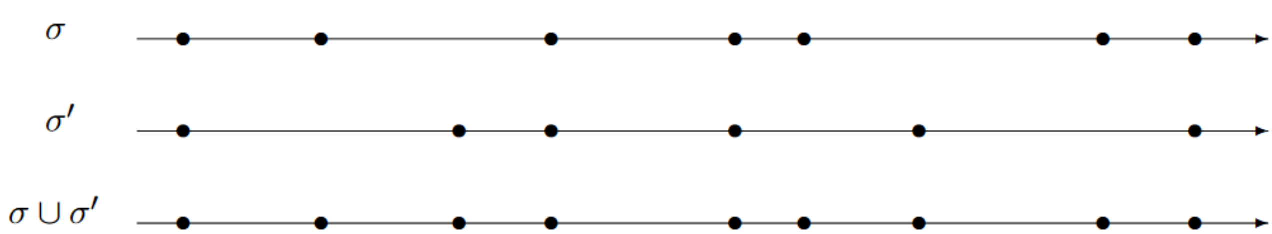
Le quadrillage / maillage de $\left[a,b\right]$ est plus "fin" avec σ' qu'avec σ.

Définition 34.3

Soit $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ et $\sigma' = (x'_i)_{0\leq i\leq m}$ deux subdivisions de $\left[a,b\right]$. On définit la réunion de σ et σ' comme étant la subdivision σ'' obtenue en prenant tous les points de σ et de σ' (si un point est présent en double, il n'est pris qu'une fois).
On notera abusivement cette réunion $\sigma'' = \sigma \cup \sigma'$.

Autrement dit, σ'' est la réunion de σ et de σ' si et seulement si $\text{Supp}\,(\sigma'') = \text{Supp}\,(\sigma) \cup \text{Supp}\,(\sigma')$.

Exemple 4.



Exemple 5. Dans l'Exemple 3, σ' est plus fine que σ et ainsi $\sigma \cup \sigma' = \sigma'$.

Remarque. $\sigma \cup \sigma'$ est plus fine que σ et que σ'.

1.2 Fonctions en escaliers

Définition 34.4 – Fonction en escalier

Soit $f : \left[a,b\right] \to \mathbb{K}$. On dit que f est en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction f soit constante sur chaque intervalle $\left]x_i, x_{i+1}\right[$. Autrement dit :

Une telle subdivision σ est dite adaptée à f.

Notation. On note $\mathcal{E}(\left[a,b\right], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $\left[a,b\right]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On notera qu'on n'impose aucune condition sur la valeur de f aux points $x_0, \cdots, x_n$ (excepté que f doit être définie en ces points).

Exemple 6. La fonction partie entière est en escalier sur (par exemple) l'intervalle $\left[0,10\right]$. Quelles subdivisions parmi les suivantes sont adaptées à la fonction partie entière ?

$$\sigma_1 = (0,1,2,\cdots,10) \qquad \sigma_2 = (0,2,4,\cdots,10) \qquad \sigma_3 = \left(0,\frac{1}{2},1,\cdots,9,9+\frac{1}{2},10\right)$$

Exemple 7. Les fonctions suivantes sont en escalier.

Exemple 8.
- Sur tout intervalle $\left[a,b\right]$, la fonction identité $x \mapsto x$ n'est pas une fonction en escalier : aucune subdivision de $\left[a,b\right]$ ne peut lui être adaptée.
- Il en va de même pour la fonction indicatrice sur $\mathbb{Q}$.

Théorème 34.5

Soit $f \in \mathcal{E}(\left[a,b\right],\mathbb{K})$ et σ_f une subdivision adaptée à f. Si σ' est une subdivision plus fine que σ_f, alors la subdivision σ' est également adaptée à f.

Voir le dessin ci-dessus pour une illustration.

Théorème 34.6

$\mathcal{E}(\left[a,b\right],\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}^{\left[a,b\right]},+,\cdot)$ et un sous-anneau de $(\mathbb{K}^{\left[a,b\right]},+,\times)$.
De plus, si $f \in \mathcal{E}(\left[a,b\right],\mathbb{K})$, alors f est bornée sur $\left[a,b\right]$.

En particulier, la somme, la différence, la multiplication par un scalaire et le produit de fonctions en escalier reste une fonction en escalier.

Démonstration.

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{E}(\left[a,b\right],\mathbb{K})$. On note $\sigma_f = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ et $\sigma_g = (x'_j)_{0\leq j\leq m}$ des subdivisions de $\left[a,b\right]$ adaptées à f et g. Ainsi, pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$ et pour tout $j \in [\![0,m-1]\!]$, la fonction f est constante sur $\left]x_i,x_{i+1}\right[$ et g est constante sur $\left]x'_j,x'_{j+1}\right[$.

On pose enfin la subdivision

$$\sigma' = \sigma_f \cup \sigma_g = (z_k)_{0\leq k\leq N}$$

qui est donc une subdivision plus fine que σ_f et σ_g. Par construction de σ', pour tout $k \in [\![0,N-1]\!]$, il existe i et j tels que l'intervalle $\left]z_k,z_{k+1}\right[$ est inclus dans $\left]x_i,x_{i+1}\right[$ et dans $\left]x'_j,x'_{j+1}\right[$. Ainsi, f et g sont constantes sur chaque intervalle $\left]z_k,z_{k+1}\right[$. Il en va donc de même pour $f-g$, pour fg, pour λf avec $\lambda \in \mathbb{K}$, ce qui prouve la première assertion.

Pour la seconde assertion, pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, f est constante sur $\left]x_i,x_{i+1}\right[$: on note y_i cette valeur. On montre alors par disjonction de cas que

$$\forall x \in \left[a,b\right] \qquad |f(x)| \leq \max(|f(x_0)|,|f(x_1)|,\cdots|f(x_n)|,|y_0|,|y_1|,\cdots,|y_{n-1}|)$$

Le membre de droite représente un maximum d'un nombre fini de termes : sa valeur est donc bien finie : f est bornée sur $\left[a,b\right]$.

$\square$

1.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 34.7 – Intégrale d'une fonction en escalier

Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$. Soit $\sigma_f = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision adaptée à f. On définit l'intégrale de f comme étant le scalaire suivant :

$$\int_{[a,b]} f := \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)y_i$$

avec $y_0,\cdots,y_{n-1}$ les valeurs respectives que prend f sur les intervalles $]x_0,x_1[,\cdots,]x_{n-1},x_n[$.

Remarque. La valeur $\int_{[a,b]} f$ ne dépend pas de la subdivision adaptée σ choisie. Par ailleurs, l'intégrale de f ne dépend pas des valeurs de f aux points $x_0,\cdots,x_n$.

Dans la définition de $\int_{[a,b]} f$, on a supposé $a<b$. On peut étendre cette définition à deux réels a et b quelconques, ce que l'on notera $\int_a^b f$:

$$\int_a^b f := \begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{si } a<b \\ 0 & \text{si } a=b \\ -\int_{[b,a]} f = -\int_a^b f & \text{si } b<a \end{cases}$$

1.4 Fonctions continues par morceaux

Définition 34.8 – Fonction continue par morceaux

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a,b]$ telle que :

1. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction f restreinte à $]x_i, x_{i+1}[$ (càd $f|_{]x_i,x_{i+1}[}$) est continue.
2. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on peut prolonger $f|_{]x_i,x_{i+1}[}$ en une fonction continue sur $[x_i, x_{i+1}]$.

Une telle subdivision σ est dite adaptée à f.

Notation. On note $\mathcal{CM}([a,b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

Autrement dit, f est continue par morceaux sur $[a,b]$ si :

- Elle n'admet qu'un **nombre *fini* de points de discontinuité** ...
- Et si f admet en tout point de discontinuité une **limite à gauche** (sauf en a) et une **limite à droite** (sauf en b) qui sont **finies**.

Exemple 9. Toute fonction continue sur $[a,b]$ est en particulier continue par morceaux sur $[a,b]$.

Exemple 10. Les fonctions suivantes sont continues par morceaux.

Exemple 11. La fonction $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux sur $[-1,1]$ car elle n'admet pas de limite finie à droite en 0.

Théorème 34.9

$\mathcal{CM}([a,b], \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^{[a,b]}, +, \cdot)$ et un sous-anneau de $(\mathbb{R}^{[a,b]}, +, \times)$.
De plus, si $f \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{R})$, alors f est bornée sur $[a,b]$.

Démonstration. Étant donné f, g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ de subdivisions adaptées σ_f et σ_g, on montre par exemple que $f+g$ est continue par morceaux. En posant $\sigma = \sigma_f \cup \sigma_g := (x_i)_{0 \leq i \leq N}$, on montre que σ est adaptée à f et à g : sur tout intervalle $\left]x_i, x_{i+1}\right[$, f et g sont continues et prolongeables par continuité sur $\left[x_i, x_{i+1}\right]$ en une fonction continue, donc $f+g$ aussi. Idem pour λf et pour fg.

□

1.5 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Lemme 34.10 – Lemme d'approximation

Soit $f \in \mathcal{CM}(\left[a,b\right],\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{E}(\left[a,b\right],\mathbb{R})$ telle que :

$$\sup_{x\in\left[a,b\right]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

La fonction φ dépend de facto de ε.

Démonstration. La construction précise de φ est hors-programme (mais on peut le voir sur un dessin) :

□

Théorème 34.11 – Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit $f \in \mathcal{CM}(\left[a,b\right],\mathbb{R})$.

- Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $\left[a,b\right]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\sup_{x\in\left[a,b\right]} |f(x) - \varphi_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

- Pour toute telle suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $\left(\int_a^b \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On définit l'intégrale de f sur $\left[a,b\right]$ par :

$$\int_{\left[a,b\right]} f := \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n$$

Cette limite ne dépend pas de la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie, ce qui fait que $\int_{\left[a,b\right]} f$ est bien définie.

Démonstration. Peut être sautée en première lecture. Cf section Compléments. □

On a donc défini la valeur de $\int_{[a,b]} f$ pour une fonction continue par morceaux. Cette valeur présuppose d'avoir $a < b$. Comme pour les fonctions en escalier, on étend la définition de cette intégrale sans supposer $a < b$:

$$\int_a^b f := \begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ -\int_{[b,a]} f = -\int_a^b f & \text{si } b < a \end{cases}$$

1.6 Intégrale d'une fonction complexe

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. On rappelle qu'alors $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. En particulier, on peut donner un sens aux notions de continuité par morceaux et d'intégrale pour les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Définition 34.12 – Intégrale si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont, et dans ce cas on définit l'intégrale de f par :

$$\int_a^b f \quad := \quad \int_a^b \operatorname{Re} f \quad + \quad i \int_a^b \operatorname{Im} f \quad \in \mathbb{C}$$

Notation. On note $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Théorème 34.13

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})$.

$$\int_a^b \operatorname{Re} f = \operatorname{Re}\left(\int_a^b f\right) \qquad \int_a^b \operatorname{Im} f = \operatorname{Im}\left(\int_a^b f\right) \qquad \overline{\int_a^b f} = \int_a^b \overline{f}$$

Démonstration. Cela découle immédiatement de la définition ci-dessus. □

Exemple 12. Calculer $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{t+i} dt$.

2 Propriétés de l'intégrale

2.1 Résultats liés à la construction

Notation non officielle : dans ce qui suit, on note $I_{a,b}$ l'intervalle fermé borné ayant a et b pour bornes, càd :

- Si $a < b$ alors $I_{a,b} = [a,b]$
- Si $b < a$ alors $I_{a,b} = [b,a]$
- Si $a = b$ alors $I_{a,b} = \{a\}$

On notera que par définition $I_{a,b} = I_{b,a}$.

Théorème 34.14

Soit $a,b \in \mathbb{R}$ (sans supposer $a < b$). Soit $f,g : I_{a,b} \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues par morceaux.

1. Linéarité : pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ la fonction $\alpha f + \beta g$ est continue par morceaux sur $I_{a,b}$ et
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$
2. Chasles : soit $c \in I_{a,b}$. Alors f est continue par morceaux sur $I_{a,c}$ et $I_{c,b}$ et
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$
3. (Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) Positivité : si $f \geq 0$ et $\boxed{a \leq b}$, alors $\int_a^b f \geq 0$.
4. (Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) Croissance : si $f \leq g$ et $\boxed{a \leq b}$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
5. **Inégalité triangulaire (intégrale)** : la fonction $|f|$ est continue par morceaux, et si $\boxed{a \leq b}$,
$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Idée de la preuve. On montre d'abord que ce Théorème est vrai quand pour les fonctions en escalier (i.e. quand on remplace "continue par morceaux" par "en escalier"). Pour ce faire, on a uniquement besoin de la Définition 34.7.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dispose de deux suites $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier telles que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n = \int_a^b f \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n = \int_a^b g$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions φ_n et ψ_n vérifient les propriétés ci-dessus. En passant à la limite dans ces propriétés, on montre qu'il en est de même pour f et g.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les fonctions $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Re} g$ et $\operatorname{Im} g$, sont des fonctions réelles continues par morceaux. Elles vérifient donc ces propriétés. On montre qu'il en est de même pour f et g en utilisant la définition d'intégrale d'une fonction complexe (Définition 34.12).

□

Remarque. On peut reformuler l'inégalité triangulaire sans supposer $a \leq b$ de la manière suivante :
$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} |f| \qquad \text{ou encore} \qquad \left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b |f| \right|$$

Exemple 13. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\left|\int_0^x e^t \sin t \, dt\right| \leq e^{|x|}$

Théorème 34.15

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f est *continue, positive* et vérifie $\int_a^b f = 0$. Dans ce cas, $f \equiv 0$.

Ce théorème est faux si f est seulement continue par morceaux. Par exemple, la fonction f définie par $f(0) = 1$ et qui est nulle sur $\mathbb{R}^*$ a une intégrale nulle sur $[-1,1]$ mais n'est pas identiquement nulle sur $[-1,1]$.

Démonstration.

□

2.2 Théorème fondamental de l'analyse

On rappelle ici des résultats vus au chapitre 10 pour des fonctions continues ou de classe $\mathscr{C}^1$. Ils ne se généralisent *pas* aux fonctions continues par morceaux, l'hypothèse de continuité de la fonction (ou de sa dérivée) est essentielle :

Théorème 34.16 – Théorème Fondamental de l'Analyse

Soit I un intervalle, $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$. L'application

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Démonstration.

□

Corollaire 34.17 – TFA généralisé

Soit $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$, J un intervalle et $a, b : J \to I$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ (sur J). Alors la fonction

$$\begin{aligned} \Phi : J &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \end{aligned}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ (sur J) et

Démonstration.

□

Exemple 14. Montrer que l'application $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{4-t} dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, 2[$ et calculer sa dérivée.

2.3 Parité, périodicité, valeur moyenne

Le résultat qui suit a été vu pour des fonctions continues. On peut l'étendre aux fonctions continues par morceaux :

Théorème 34.18

Soit $a > 0$ et f une fonction.

- Si $f \in \mathcal{CM}(\big[-a,a\big],\mathbb{K})$ est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 2\int_{0}^{a} f$.
- Si $f \in \mathcal{CM}(\big[-a,a\big],\mathbb{K})$ est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 0$.
- Si $f \in \mathcal{CM}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ est T-périodique, alors pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_{b}^{b+T} f = \int_{0}^{T} f$.

Définition 34.19 – Valeur moyenne

Soit $f \in \mathcal{CM}(\big[a,b\big],\mathbb{K})$. On appelle valeur moyenne de f le scalaire

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f \quad \in \mathbb{K}$$

La valeur $\quad \alpha = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f \quad$ est l'unique scalaire qui vérifie $\quad \displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \alpha.$

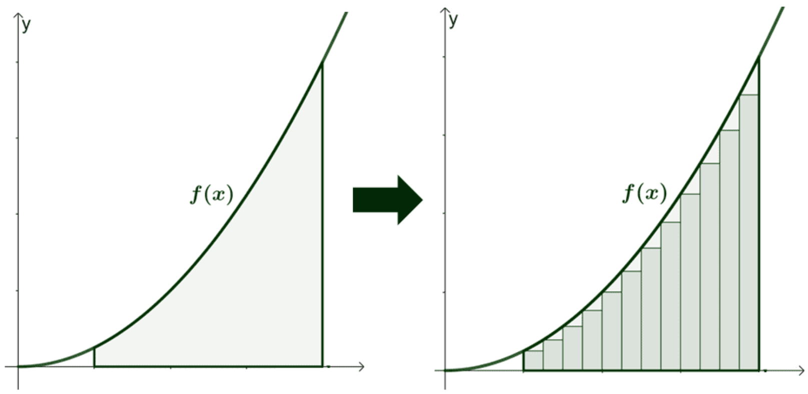
3 Sommes de Riemann – introduction au calcul numérique de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur $\big[a,b\big]$. On cherche à calculer numériquement (par Python ou autre) la valeur de $\displaystyle\int_a^b f$. Si on connait une primitive F de f sur $\big[a,b\big]$, alors $\displaystyle\int_a^b f = F(b)-F(a)$. Mais Python ne pourra pas deviner une primitive pour n'importe quelle fonction f ! On présente ici une méthode pour construire numériquement une suite qui converge vers l'intégrale.

Pour cela, on considère la subdivision régulière de $\big[a,b\big]$ qui partage cet intervalle en n intervalles de même longeur : $\sigma = (x_k)_{0\leq k\leq n}$ avec

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \qquad x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$$

Le principe est d'approcher l'aire sous la courbe de $\mathscr{C}_f$ par une succession de n rectangles, un pour chaque intervalle $\left[x_k, x_{k+1}\right]$:



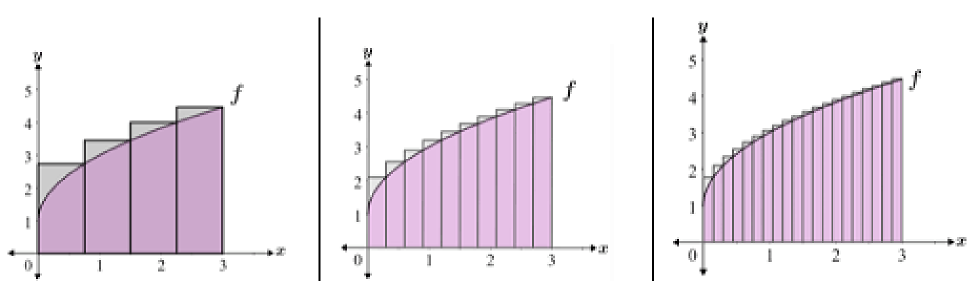
Il y a en tout n rectangles

- La largeur de chaque rectangle vaut ....
- En revanche, la hauteur est variable : le rectangle ayant pour largeur $\left[x_k, x_{k+1}\right]$ a pour hauteur ....

Ainsi, l'aire totale obtenue par les rectangles, que l'on notera S_n, est donnée par :

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une somme de Riemann associée à f. Elle est obtenue par la méthode des rectangles à gauche. On comprend intuitivement que, lorsque n tend vers $+\infty$, la somme de Riemann (S_n) tend vers la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$.

À noter : on peut aussi définir une somme de Riemann associée à f par la méthode des rectangles à droite : cette fois la hauteur du rectangle ayant pour base $\left[x_k, x_{k+1}\right]$ est choisie comme étant $f(x_{k+1})$. Si on note S'_n l'aire totale de ces rectangles. Là encore, on a $S'_n \to \displaystyle\int_a^b f$:



Enfin, cela fonctionne si f est continue, mais aussi lorsque f est continue par morceaux :

Théorème 34.20

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f \qquad \text{avec} \quad S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n' = \int_a^b f \qquad \text{avec} \quad S_n' = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

Remarque. Ces théorèmes s'utilisent dans 95% des cas avec $a=0$ et $b=1$. Ce qui donne les formules :

Exemple 15. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k^2}$.

4 Limite d'intégrales

Certaines intégrales peuvent dépendre d'un paramètre avec des formes variées :

$$\begin{cases} I = I(n) = \displaystyle\int_a^b f(t,n)dt \qquad \text{ou} \qquad I = I(n) = \int_{a_n}^{b_n} f(t)dt \\ I = I(x) = \displaystyle\int_a^b f(t,x)dt \qquad \text{ou} \qquad I = I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \end{cases} \tag{$*$}$$

et on peut chercher la limite ℓ de I quand le paramètre tend vers une valeur donnée (par exemple $n \to +\infty$ ou $x \to x_0$). On peut parfois **conjecturer** la limite ℓ en étudiant attentivement I. Il est par exemple fréquent que la limite de l'intégrale soit aussi l'intégrale de la limite (mais ce n'est pas un théorème !) :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} I(n) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t,n)dt \overset{\boxed{\text{NJ}}}{=} \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f(t,n)dt$$

Méthode – Trouver une limite avec une intégrale

Pour déterminer la limite d'une intégrale I à paramètre, typiquement sous une des formes de $(*)$, on peut :

- Conjecturer une limite ℓ, puis :
  - Si ℓ est finie, majorer $|I-\ell|$ par un terme qui tend vers 0.
  - Si $\ell = -\infty$, majorer I par un terme qui tend vers $-\infty$
  - Si $\ell = +\infty$, minorer I par un terme qui tend vers $+\infty$.
- Encadrer $f(t)$ / $f(t,x)$ / $f(t,n)$ par des fonctions simples, qui, après intégration selon t, tendent vers la même limite ℓ quand le paramètre tend vers la valeur donnée.

Exemple 16. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I(n) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{t+n}dt$. Déterminer la limite de $I(n)$ quand $n \to +\infty$.

Exemple 17. Pour tout $x > 1$, on pose $I(x) := \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$. Déterminer la limite de $I(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

5 Formules de Taylor globales

5.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 34.21 – Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{K})$. Alors :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Remarque. Cette formule ressemble beaucoup à la formule de Taylor-Young. Cependant, ces deux formules sont à bien des égards différentes :

- La formule de Taylor avec reste intégral est valable pour tout point x de I : elle a donc une validité “globale”, mais l’inconvénient est qu’elle nécessite d’avoir f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.
- La formule de Taylor-Young a une validité “locale” : elle ne fait que donner une information sur une limite quand x tend vers a. Cependant, elle nécessite uniquement f de classe $\mathscr{C}^n$ pour être valide.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n = 0$, pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$, on a (conséquence du TFA) :

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$$

  Ainsi, la propriété est vraie pour $n = 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n. Montrons-la pour le rang $n+1$. Soit $f \in \mathscr{C}^{n+2}(I,\mathbb{K})$. Alors a fortiori $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{K})$, si bien que par l’hypothèse de récurrence :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Finalement, la propriété est vraie pour tout rang $n \in \mathbb{N}$. $\square$

5.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

La formule de Taylor avec reste intégral est importante, mais la plupart des exercices nécessitent plutôt l'inégalité qui suit :

Théorème 34.22 – Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$. Soit $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{t \in I} \left| f^{(n+1)}(t) \right| \leq K$$

Alors,

$$\forall x \in I \qquad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq K \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Remarque. Si $n = 0$, alors l'inégalité de Taylor-Lagrange coïncide avec l'inégalité des accroissements finis : si $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$, pour tout $K \geq \sup\limits_{t \in I} |f'(t)|$, on a :

$$\forall x \in I \qquad |f(x) - f(a)| \leq K \times |x-a|$$

Démonstration. Comme f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à f. On ne traite que le cas $x \geq a$:

$$\begin{aligned}
\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right| &= \left|\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt\right| \\
&\leq \int_a^x \left|\frac{(x-t)^n}{n!}\right| \times \left|f^{(n+1)}(t)\right| dt \qquad \text{car } x \geq a \\
&\leq \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \times K\,dt \qquad \text{car } x-t \geq x-a \geq 0 \\
&= \frac{K}{n!}\int_a^x (x-t)^n dt \\
&= \frac{K}{n!}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)}\right]_a^x \\
&= \frac{K}{(n+1)!} \times (x-a)^{n+1}
\end{aligned}$$

□

Exemple 18. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a : $\left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}\right| \leq \frac{x^5}{5!}$

6 Continuité uniforme

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On rappelle que f est continue sur I si :

$$\forall x \in I \quad \underbrace{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in I \qquad \Big(\quad |x-y| \leq \delta \implies |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon \quad \Big)}_{f \text{ est continue en } x} \tag{34.1}$$

Dans cette définition, le δ à trouver dépend a priori de x et de ε.

Définition 34.23 – Continuité uniforme

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in I \qquad \Big(\quad |x-y| \leq \delta \implies |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon \quad \Big) \tag{34.2}$$

Avec cette écriture, le δ dépend toujours de ε mais ne dépend plus ni de x, ni de y. On peut reformuler l'assertion 34.2 ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in I \qquad \Big(\quad y \in [x-\delta, x+\delta] \implies f(y) \in [f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon] \quad \Big)$$

Cette réécriture permet de se donner une intuition géométrique pour reconnaitre si une fonction est uniformément continue ou non.

Remarque (*Intuition géométrique de l'uniforme continuité en x de f*)**.** On considère un point mobile $(x, f(x))$ qui parcourt la courbe $\mathscr{C}_f$. En chacun de ces points, on trace un rectangle fin, ayant une demi-hauteur $\varepsilon = 1$ (par exemple) et une demi-largeur $\delta > 0$ très petite. Si la courbe $\mathscr{C}_f$ sort toujours du cadre par les côtés gauche et droite, alors la fonction est uniformément continue a priori[1].

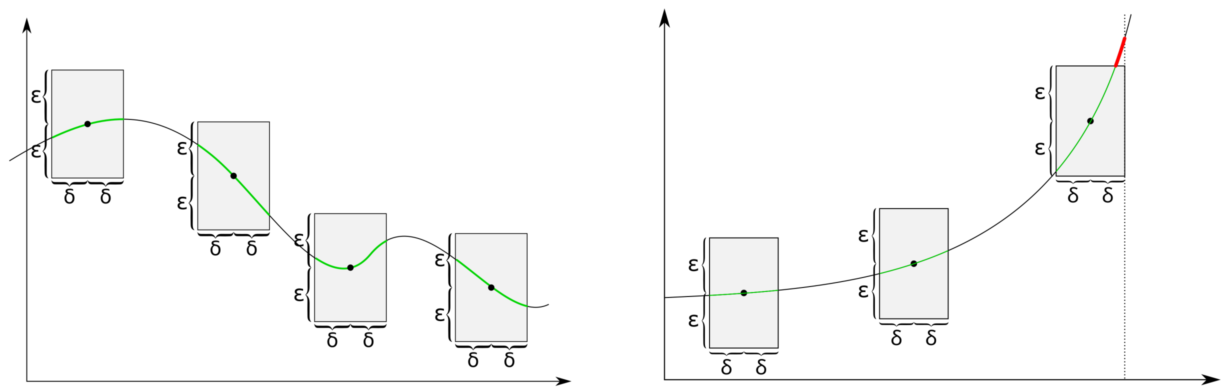


FIGURE 34.1 – Deux graphes de fonctions sur lesquels on a représenté différents cadres. Source Wikipédia[2]

Exemple 19. Parmi les deux fonctions représentée ci-dessus, celle de gauche *semble* uniformément continue. Celle de droite *ne semble pas* uniformément continue. Mais un dessin ne vaut pas une preuve rigoureuse !

Exemple 20. Est-ce que $x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$? (On tracera d'abord un dessin pour s'en convaincre puis on en donnera une preuve rigoureuse).

Théorème 34.24

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Alors on a les implications suivantes :

$$f \text{ lipschitzienne} \implies f \text{ uniformément continue} \implies f \text{ continue}$$

Démonstration. Justifions la deuxième implication : on suppose f uniformément continue sur I, elle vérifie alors la définition (34.2) vue plus haut. En particulier, f vérifie l'assertion (34.1) où le quantificateur "$\forall x \in I$" a été placé au début de l'assertion. En effet, par cet opération, le δ est alors autorisé à dépendre de x, mais on sait déjà qu'on peut le fixer indépendamment de x par l'assertion (34.2). On trouve ainsi que f est continue sur I.

Montrons la première implication. Supposons que f est K-lipchitzienne avec $K > 0$. Alors pour tous $x, y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K} > 0$. Alors, pour tous $x, y \in I$

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq K\delta = \varepsilon$$

donc f est uniformément continue. $\square$

Théorème 34.25 – Théorème de Heine

Si f est continue sur un segment $\left[a, b\right]$, alors f est uniformément continue sur $\left[a, b\right]$.

Exemple 21. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\left[0, 1\right]$ car elle est continue sur $\left[0, 1\right]$.

7 Complément : preuve du théorème qui définit l'intégrale d'une fonction continue par morceaux

Rappelons ce théorème. La fonction φ_n a été renommée en g_n car on aura besoin de la lettre φ dans la preuve :

Théorème 34.26 – Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit $f \in \mathcal{CM}(\left[a,b\right],\mathbb{R})$.

- Il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $\left[a,b\right]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\sup_{x\in\left[a,b\right]} |f(x)-g_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

- Pour toute telle suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $\left(\int_a^b g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On définit l'intégrale de f sur $\left[a,b\right]$ par :

$$\int_{\left[a,b\right]} f := \lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n$$

Cette limite ne dépend pas de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie.

Démonstration. Tout d'abord, on peut montrer que le Théorème 34.14 est vrai pour les fonctions en escalier, en utilisant uniquement la Définition 34.7.

Ensuite, on utilise le lemme d'approximation (Lemme 34.10) : pour tout $n\in\mathbb{N}$, si on pose $\varepsilon = \dfrac{1}{n+1} > 0$, il existe une fonction $g_n \in \mathcal{E}(\left[a,b\right],\mathbb{R})$ telle que

$$\sup_{x\in\left[a,b\right]} |f(x)-g_n(x)| \le \frac{1}{n+1}$$

On dispose donc d'une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}(\left[a,b\right],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\alpha_n := \sup_{x\in\left[a,b\right]} |f(x)-g_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

- Montrons que $\left(\int_a^b g_n\right)$ est bornée. Par inégalité triangulaire (intégrale), on a :

$$\left|\int_a^b g_n(x)dx\right| \le \int_a^b |g_n(x)|\,dx$$

Il faut donc majorer la fonction $|g_n|$. Comme $f\in\mathcal{CM}(\left[a,b\right],\mathbb{R})$, la fonction f est bornée par une constante $M\in\mathbb{R}$. Alors, pour tout $x\in\left[a,b\right]$ et $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}|g_n(x)| &= |g_n(x)-f(x)+f(x)|\\ &\le |g_n(x)-f(x)|+|f(x)|\\ &\le \sup_{x\in\left[a,b\right]} |g_n(x)-f(x)| + \sup_{x\in\left[a,b\right]} |f(x)|\\ &\le \alpha_n + M\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\left|\int_a^b g_n(x)dx\right| \le \int_a^b |g_n(x)|\,dx \le \int_a^b (\alpha_n+M)\,dx = (\alpha_n+M)\times(b-a)$$

Or, la suite (α_n) est convergente, donc bornée par un certain $K\in\mathbb{R}_+$. On en déduit que $\left(\int_a^b g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $(K+M)(b-a)$.

- Montrons à présent que la suite $\left(\int_a^b g_n\right)$ converge. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, comme la suite $\left(\int_a^b g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente : il existe donc une extractrice φ et un réel ℓ tels que

$$\int_a^b g_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

On va montrer qu'en fait la suite $\left(\int_a^b g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ toute entière (et pas juste sa sous-suite) converge vers ℓ. Pour cela montrons que $\left|\int_a^b g_n - \ell\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On a tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b g_n - \ell\right| &= \left|\int_a^b g_n - \int_a^b g_{\varphi(n)} + \int_a^b g_{\varphi(n)} - \ell\right| \\
&\leq \left|\int_a^b g_n - \int_a^b g_{\varphi(n)}\right| + \underbrace{\left|\int_a^b g_{\varphi(n)} - \ell\right|}_{\to 0} \qquad \text{car } \int_a^b g_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $\left|\int_a^b g_n - \int_a^b g_{\varphi(n)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b g_n - \int_a^b g_{\varphi(n)}\right| &\leq \int_a^b \left|g_n(t) - g_{\varphi(n)}(t)\right| dt \qquad \text{par inégalité triangulaire intégrale} \\
&= \int_a^b \left|g_n(t) - f(t) + f(t) - g_{\varphi(n)}(t)\right| dt \\
&\leq \int_a^b \left|g_n(t) - f(t)\right| dt + \int_a^b \left|f(t) - g_{\varphi(n)}(t)\right| dt \qquad \text{par in. tri. dans } \mathbb{R} \\
&\leq \int_a^b \alpha_n + \int_a^b \alpha_{\varphi(n)} \qquad \text{car } \begin{cases} \sup\limits_{t\in[a,b]} \left|g_n(t) - f(t)\right| \leq \alpha_n \\ \sup\limits_{t\in[a,b]} \left|g_{\varphi(n)}(t) - f(t)\right| \leq \alpha_{\varphi(n)} \end{cases} \\
&= \left(\alpha_n + \alpha_{\varphi(n)}\right)(b-a)
\end{aligned}$$

Or, $\alpha_n \to 0$ et par suite, $\alpha_{\varphi(n)} \to 0$. Donc $\left|\int_a^b g_n - \int_a^b g_{\varphi(n)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Finalement, on a bien montré que $\int_a^b g_n \to \ell$.

- Enfin, il faut montrer que la limite ℓ trouvée ne dépend pas de la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite telle que

$$\beta_n := \sup_{x\in[a,b]} \left|f(x) - h_n(x)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On montre alors de même qu'il existe $\ell' \in \mathbb{R}$ tel que $\int_a^b h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$. Montrons que $\ell = \ell'$. Pour tout

$x \in [a,b]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b g_n - \int_a^b h_n\right| &= \left|\int_a^b (g_n - h_n)\right| \\
&\leq \int_a^b |g_n - h_n| \\
&= \int_a^b |g_n - f + f - h_n| \\
&\leq \int_a^b |g_n - f| + \int_a^b |f - h_n| \\
&\leq \int_a^b \alpha_n + \int_a^b \beta_n \\
&= \alpha_n(b-a) + \beta_n(b-a) \to 0 \qquad \text{car } \alpha_n \to 0 \quad \text{et} \quad \beta_n \to 0
\end{aligned}$$

Et donc $\left|\int_a^b g_n - \int_a^b h_n\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or, on a également $\left|\int_a^b g_n - \int_a^b h_n\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell - \ell'|$ par opérations sur les limites. D'où par unicité de la limite $|\ell - \ell'| = 0$, i.e. $\ell = \ell'$.

$\square$

8 Méthodes pour les exercices

Méthode – Intégrales à paramètre

Pour calculer une limite d'une intégrale à paramètre I donnée, on peut :

- Conjecturer la limite puis montrer que I tend bien vers cette limite, via un encadrement (si la limite est finie) ou une majoration / minoration (si elle est infinie), cf Exemple 16.
- Sinon, on peut essayer d'encadrer / majorer / minorer la fonction à l'intérieur de l'intégrale assez finement pour que, après intégration, on puisse en déduire la limite, cf Exemple 17.

Méthode

Pour calculer une limite ou un équivalent d'une somme $\sum f(k)$, on peut essayer de faire apparaitre une somme de Riemann, en essayant de la transformer en $n^\alpha \sum f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.